NÚMEROS REALES

SISTEMA DE LOS NÚMEROS REALES

El sistema de los números reales es un conjunto $R$ con dos operaciones: suma (+) y multiplicación (.), y una relación de orden $"<"$ que se lee “menor que” y que se satisface el siguiennte conjunto de axiomas de los números reales:

1.- $a+b\in R, ∀a,b\in R$ (Ley de clausura)

2.- $a+b=b+a, ∀a,b\in R$ (Ley conmutativa)

3.- $\left(a+b\right)+c=a+\left(b+c\right), ∀a,b,c\in R$ (Ley asociativa)

4.- $∃!0\in R tal que a+0=0+a=a, ∀a\in R$(0 neutroaditivo)

5.-$∃!-a\in R, talquea+\left(-a\right)=-a+a=0; ∀a\in R$(-a inverso aditivo)

6.- $a.b\in R, ∀a,b\in R$ (Ley de clausura)

7.- $a.b=b.a, ∀a,b\in R$ (Ley conmutativa)

8.- $\left(a.b\right).c=a.\left(b.c\right), ∀a,b,c\in R$ (Ley asociativa)

9.- $∃!1\in R tal que a.1=a=1.a, ∀a\in R$ (1 neutro multiplicativo)

10.- $∃!a^{-1}\in R, tal que a.a^{-1}=a^{-1}.a=1; ∀a\in R,a\ne 0$ ($a^{-1} inv. multiplicati$)

11.- $a\left(b+c\right)=a.b+a.c$, $∀a,b,c\in R$ (Ley distributiva)

12.- $\left(a+b\right).c=a.c+b.c, ∀a,b,c\in R$ (Ley distributiva)

13.- Dados $a,b\in R$, entonces una y solamente una de las siguientesrelaciones se cumplen:

$$a<b, a=b ó a>b$$

14.- Si $a<b y b<c entonces a<c$ (Ley transitiva)

15.- Si $a<b $entonces $a+c<b+c, ∀c\in R$

16.- Si $a<b y c>0 $entonces $a.c<b.c$

17.- Axioma del supremo (Axioma de la menor cota superior)

Todo conjunto de números reales A$\ne ∅$ (no vacio), acotado superiormente, tiene una menor cota superior, llamada también supremo de A.

Axiomas de la relación de igualdad de los números reales

1.- $a=a, ∀a\in R$ Propiedad reflexiva

2.- Si $a=b$ entonces $b=a$ Propiedad simétrica

3.- Si $a=b y b=c $entonces $a=c$ Propiedad transitiva

4.- En cualquier proposición concerniente (Principio de sustitución)

a los números reales, todo número real puede ser reemplazado por su igual sin alterar el valor veritativo de tal proposición.

Propiedades de los números reales

1.- Principio de sustitución de la adición de los números reales

Si $a=b y c=d$ entonces $a+c=b+d$

2.- Principio de sustitución de la multiplicación en $R$

Si $a=b y c=d$ entonces $a.c=b.d$

3.- Corolario.- $∀c\in R$

 a) Si $a=b$ entonces $a+c=b+c$

 b) Si $a=b$ entonces $a.c=b.c$

Teorema.- Sean $a,b\in R$, entonces $a.b=0 ⇔ \left[a=0 ∨ b=0\right]$

Definición.- (Sustracción) $∀a,b\in R$ se define

$$a-b=a+\left(-b\right)$$

Definición.- (División) $∀a,b\in R, $con $b\ne 0$

$$\frac{a}{b}=a.b^{-1}$$

Valor absoluto

Definición.- Se llama valor absoluto de un número real x al número no negativo denotado por $\left|x\right|$ y definido por:

$$\left|x\right|=\left\{\begin{array}{c}x , si x>0\\0 , si x=0\\-x , si x<0\end{array}\right.$$

Teorema.- 1)$ ∀x\in R: \left|x\right|\geq 0$

 2)$\left|x\right|=0 \leftrightarrow x=0$

Definición.- Si $x\in R$, entonces $\left|x\right|$ es el número real no negativo definido por: $\left|x\right|=\left\{\begin{array}{c}x , x\geq 0\\-x , x<0\end{array}\right.$

Teorema.- $∀x\in R, y\in R:$

1. $\left|-x\right|=\left|x\right|$
2. $\left|xy\right|=\left|x\right|\left|y\right|$

Teorema.- $∀x\in R:$

 a)$\left|x\right|^{2}=x^{2}$

 b)$\left|x^{2}\right|=x^{2}$

Teorema.- $∀x\in R: \sqrt{x^{2}}=\left|x\right|$

Teorema de la desigualdad triangular.- $∀x,y\in R, \left|x+y\right|\leq \left|x\right|+\left|y\right|$

Corolario.- $∀x,y\in R, \left|x-y\right|\geq \left|\left|x\right|-\left|y\right|\right|$

Ecuaciones con valor absoluto.-

Teorema.- $\left|x\right|=b⟺\left\{\begin{array}{c}(b\geq 0)\\y [x=b o x=-b]\end{array}\right.$

Teorema.- Dados $a,b\in R: \left|a\right|=\left|b\right|⟺[a=b o a=-b]$

Inecuaciones con valor absoluto

Teorema.- Sean $x,a\in R,$ entonces

* + 1. $\left|x\right|\leq a⟺[\left(a\geq 0\right)y (-a\leq x\leq a)]$
		2. $\left|x\right|\geq a⟺\left[\left(x\geq a\right) o \left(x\leq -a\right)\right]$

Máximo entero

Definición.- Dado un número real x, se llama el máximo entero de x al número entero denotado por $\left⟦x\right⟧$y que es el mayor de todos los enteros que son menores o iguales al número real x.

$\left⟦x\right⟧=$max{entero $n\in Z $tal que $n\leq x$}

Propiedad fundamental del máximo entero

 Sea $x\in R,$ arbitrario, y sea $n\in Z,$ entonces

$$\left⟦x\right⟧=n⟺n\leq x<n+1, n\in Z$$

Propiedades del máximo entero:

1. El máximo entero $\left⟦x\right⟧$ siempre es un número entero tal que:

$$\left⟦x\right⟧=n⟺n\in [n,n+1>, n\in Z$$

1. $∀x\in R:\left⟦x\right⟧\leq x<\left⟦x\right⟧+1$
2. $∀x\in R:$ 0$\leq x-\left⟦x\right⟧<1$
3. $\left⟦x\right⟧=x⟺x\in Z$
4. $\left⟦\left⟦x\right⟧\right⟧=\left⟦x\right⟧, ∀x\in R$

Teorema.- Sea $x\in R$, $∀n\in Z:\left⟦x+n\right⟧=\left⟦x\right⟧$

Cota superior e inferior de un conjunto

Definición.- Sea $A$ un subconjunto no vacío de $R$

1)Se dice que $A$ es acotado superiormente si$∃ k\_{1}\in R$ / $a\leq k\_{1}, ∀a\in A.$

$k\_{1}$es llamado cota superior de A.

2)Se dice que $A$ es acotado inferiormente si $∃ k\_{2}\in R$ / $k\_{2}\leq a, ∀a\in A.$

$k\_{2}$es llamado cota inferior de A.

3) Se dice que A es acotado si es acotado superiormente e inferiormente.

Definición.- Sea $A⊂R$ y $A\ne Φ$.

1)$s\in R$ se llama supremo de $A$ y se denota $s=sup⁡(A)$ si:

 a)$ s$ es cota superior de $A$, es decir $a\leq s, ∀a\in A.$

b)si$b\in R y b<s⇒∃x\in A tal que b<x\leq s$

2)$r\in R$ se llama ínfimo de $A$ y se denota $r=inf⁡(A)$ si:

 a)$ r$ es cota inferior de $A$, es decir $r\leq a, ∀a\in A$

b)si$c\in R $y $r<c⇒∃x\in A tal que r\leq x<c $

 Sí el supremo o el ínfimo de un conjunto$ A$ pertenecen al conjunto

 Son llamados el máximo o el mínimo de $A$, respectivamente y se

 Denotan como máx($A$) o mín($A$ ) respectivamente.

Axioma del supremo.

Todo conjunto no vacio acotado superiormente, posee supremo.

Proposición.- Sí $A⊂R y A\ne Φ$ y si $A$ es acotado inferiormente, entonces posee ínfimo.

Proposición.- Principio de buen orden.

Todo conjunto no vacío de $Z$, acotado inferiormente posee ínfimo.

Resolver las siguientes ecuaciones

1)$x-7-9x=3x-3-7x$

2)$2\frac{1}{3}x-\frac{7}{2}x=3\frac{1}{5}x-\frac{14}{3}x-9$

3)$7-2x-\frac{1-3x}{7}=2-\frac{2x-1}{3}$

4)$\left(x+5\right)\left(x+2\right)-3\left(4x-3\right)=(5-x)^{2}$

5)$(3x-1)^{2}-5(2x+1)^{2}+\left(6x-3\right)\left(2x+1\right)=(x-1)^{2}$

6)$(x+2)^{3}-(x-2)^{3}=12\left(x^{2}-x\right)-8$

7)$\frac{8x-5}{2x+5}=5-\frac{3x+7}{3x+2}$

8)$\frac{6}{x+2}+\frac{x+2}{2-x}=\frac{x^{2}}{4-x^{2}}$

9)$3\left(a-4x\right)+7\left(2x-a\right)-5\left(3x+2a\right)+a=0$

10)$\frac{x+a}{b}-\frac{x-b}{a}=2, para a\ne b$

Hallar el cociente y el residuo de las siguientes divisiones

1)$x^{3}+x^{2}-5x-2$ entre $x-2$

2)$3x^{3}+5x^{2}+x-1$ entre $x+1$

3)$4x^{3}+5x^{2}-2x+3$ entre $2x-1$

4)$2y^{4}-y^{3}+2y^{2}-3y-5$ entre $y+2$p

5)$15x^{3}-41x^{2}+24x-8$ entre $2-5x$

6)$x^{4}+x^{3}-x^{2}-2x-2$ entre $x+\sqrt{2}$

7)$2x^{4}+3x^{3}-5x^{2}-9x-7$ entre $x-\sqrt{3}$

8)$2w^{3}+9aw^{2}+8a^{2}w-3a^{3}$ entre $w+3a$

Simplificar los siguientes conjuntos.

1)$\left(<-2,3\right]∪<0,4>)-[2,6]$

2)$<-2,3]∪(<0,4>-[2,6])$

3)$<0,4>∪\left(<-2,3]-[2,6]\right)$

4)$\left(<-2,3\right]∩[2,6]')∪(<0,4>∩[<-\infty ,2>∪<6,\infty >])$

Resolver las siguientes inecuaciones

1)$\frac{x^{2}+3x+2}{x-2}<\frac{x-2}{x+2}$ 2)$\frac{x}{x-5}>6$ 3)$ 3x^{-1}>-(x-4)$

4)$ -4\leq -2x+3\leq 4$ 5)$ 3x^{3}-9x^{2}+11x\leq 5$ 6)$ 2x^{4}<2x^{2}$

7)$ x^{3}\leq x$ 8)$\left(x-1\right)\left(2x^{2}-12x+19\right)<0$ 9)$\frac{x^{2}-2x+1}{x-1}\geq 0$

10)$\frac{\left(2x^{2}-8x+8\right)(x+3)}{x+6}\geq 0$ 11) $\frac{3x^{3}-24x^{2}+63x-54}{3x+15}\geq 0$ 12)$\frac{2}{2x+3}\in <\frac{1}{4},2]$

13)$\frac{3}{x+2}\leq \frac{6}{x+5}$ 14) 

Resolver las siguientes ecuaciones:

1)$\left|x^{2}-4\sqrt{2}x+8\right|=32$

2)$\left|3x-1\right|=\left|5x-15\right|$

3)$\left|x^{2}-3x-7\right|=3$

4)$\left|x+5\right|=2x-4$

5)$\left|6x+3\right|=\left|x+18\right|$

6)$\left|2x+9\right|=x-1$

7)$\left|x+6\right|=2x+6$

8)$\left|\left|x^{2}-1\right|-x\right|=x$

9)$\left|2-x\right|=-\left|x\right|^{2}+4$

10)$\left|\frac{x+8}{x+4}\right|=3$

11)$\left|3x+1\right|+x=7$

12)$\left|3x-5\right|+x-7=0$

13)$\left|x^{2}+2\right|=2x+1$

14)$\left|x+4\right|=x+4$

Resolver las siguientes inecuaciones.

1)$\left|x-2\right|\leq 2x$

2)$\left|2x+1\right|\geq 2+x$

3)$\left|x+6\right|<2x-1$

4)$\left|4x+3\right|>2+x$

5)$\left|x-3\right|>-1$

6)$\left|x+1\right|\leq 0$

7)$\left|x^{2}+2x-4\right|>4$

8)$\left|x^{2}+5x\right|-2x>10$

Demostrar que:

1.- 

2.- 

3.- 

4.- 

5.- 

6.- 

7.- 

8.-  pero no la recíproca.

9.- 

10.- 

11.- 

12.- 

Si  hallar 

Si . Hallar .

Si  hallar .

Sea  e  . Si  , demostrar que: 

Hallar los conjuntos solución de (resolver) las inecuaciones siguientes:

1.-  2.- 

3.-  4.- 

5.-  6.- 

7.-  8.- 

9.-  10.- 

11.-  12.- 

13.- 

Hallar el menor de los números  tales que:  , si  .

Resolver las siguientes inecuaciones (hallando sus conjuntos solución):

1.-  2.- 

3.-  4.- 

5.- 

Resolver las siguientes inecuaciones:

1.-  2.- 

3.-  4.- 

5.-  6.- 

7.-  8.- 

9.-  10.- 



Resolver las siguientes ecuaciones.

1)$\left⟦x-6\right⟧=4$

2)$\left⟦\left|x\right|-3x\right⟧=0$

3)$\left⟦\frac{6-2x}{x}\right⟧=4$

4)$\left⟦\frac{x}{2\sqrt{x}-1}\right⟧=0$

5)$\left⟦1-2x\right⟧=-5$

6)$\left⟦x^{2}-2x-3\right⟧=\sqrt{2}$

7)$\left⟦\sqrt{x}+1\right⟧=-2$

8)$\left⟦x^{2}-6x+8\right⟧=-1$

9)$\left⟦\frac{2x-1}{x+3}\right⟧=4$

10)$\left⟦x-\left|x-1\right|\right⟧=\left|x\right|$

11)$\left|2\left⟦x\right⟧-x\right|=x$

12)$\left⟦\left|4x\right|\right⟧=\left|2x\right|+1$

13)$\left⟦\left⟦3x\right⟧\right⟧=2x+2$

14)$\left⟦\sqrt{x-\left⟦x\right⟧}\right⟧=0$

Resolver las siguientes inecuaciones.

1)$\left⟦-x\right⟧>0$

2)$\left⟦-2x\right⟧<1$

3)$\left⟦\frac{3x+2}{x-1}\right⟧\leq \frac{13}{3}$

4)$\left⟦x^{2}\right⟧\leq 8$

5)$\left⟦x^{2}-7\right⟧^{2}>2$

6)$\frac{\sqrt{4-\left|x\right|}}{\left⟦x^{2}-2x-7\right⟧}>0$

7)$\left|\left⟦\frac{1}{2x}\right⟧-\sqrt{\frac{x-1}{x}}\right|<\sqrt{x}$

8)$\frac{x}{\left⟦x\right⟧}\geq 0$

9)$\frac{x}{\left⟦x\right⟧}<1$

10)$\frac{x}{\left⟦x\right⟧}\geq 1$

11)$\frac{\sqrt{\frac{x}{2-x}}}{x^{2}-\left⟦x\right⟧\left|x\right|-\frac{3}{4}}\leq 0$

12)$2\left⟦x+1\right⟧^{2}-11\left⟦x\right⟧\leq -4$

13)$\frac{\left⟦-x\right⟧-2}{6-\left⟦x\right⟧}\geq 0$

14)$\frac{\left|x\right|-1}{\left⟦x\right⟧-1}\geq 1$

15)$\frac{(\left⟦x\right⟧-2)(\sqrt{\left|x\right|-1}-1)(\sqrt{3-x}+1)}{\left|\sqrt{x}-2\right|}>0$

Sin resolver las ecuaciones explicar porqué no tienen raíces

1.-  2.-  3.- 

4.-  5.- 

Determinar el dominio o universo para las incógnitas de las ecuaciones.

1.-  2.- 

3.-  4.- 

Resolver:

1.-  2.-  3.- 

4.-   5.- 

En el caso que existan, determinar el supremo, el ínfimo, el máximo y el mínimo de los siguientes conjuntos.

1.- $A=\left\{x\in R tal que x^{2}\leq 9\right\}$

2.- $B=\left\{x\in R tal que \frac{1}{1-x}\leq 1+2x\right\}$

3.- $C=\left\{x\in R tal que 21+4x-x^{2}>0\right\}$

4.- $D=\left\{x\in R tal que \left|4-x\right|>x\right\}$

5.- $E=\left\{x\in R tal que \left|x\right|\left|x+1\right|\leq 2\right\}$

6.- $F=\left\{x\in R tal que \left|x^{2}+2x-4\right|\leq 7\right\}$

7.- $G=\left\{x\in R tal que \left|x^{2}-5x+12\right|>8\right\}$

8.- $H=\left\{x\in R tal que \left|x-1\right|+\left|x-2\right|\leq 4\right\}$

9.- $J=\left\{x\in R tal que \left|x+6\right|+\left|3-x\right|=9\right\}$

10.-$ J=\left\{x\in R tal que \left|x+6\right|+\left|3-x\right|=9\right\}$