RELACIONES

Definición.- $S$ es una relación de $A$ en $B$, si $S$ es un subconjunto de $A×B$, es decir si $S⊂(A×B)$.

Si $S$ es una relación de $A$ en $B$ se denota con $S:A\rightarrow B$ y se dice que $S$ es una correspondencia entre los elementos del conjunto $A$ y los elementos del conjunto $B$.

Observaciones:

1.- Si $x\in A ∧y\in B$ y se cumple que $(x,y)\in S$ se dice que $x$ esta en relación con $y$ mediante $S$ y se denimina con $x S y$.

2.- Si $S$ es una relación de $A$ en $B$, al conjunto $A$ se le llama conjunto de partida y al conjunto $B$ se le llama conjunto de llegada.

3.- Como $ϕ⊂A×B$, $ϕ$ es una relación de $A$ en $B$ y es llamada relación nula o vacia.

4.- $S$ es una relación en $A$, sí y solo sí, $S⊂A×A$.

5.- Si $S$ es una relación en $A$ en $B$ y $S=\left\{\left(x\_{1},y\_{1}\right), \left(x\_{2},y\_{2}\right), \left(x\_{3},y\_{3}\right), \left(x\_{4},y\_{4}\right)\right\}$ a $S$ se le representa con el siguiente gráfico.

Dominio y rango de una relación

Sea $S$ una relación no vacía de $A$ en $B$, es decir $S=\left\{\left(x,y\right)\in A×B tal que x S y\right\}$

Definición.- El dominio de $S$ es el conjunto de los elementos $x\in A$ para los cuales existe un $yϵB$ tal que $(x,y)\in S$; es decir el dominio de $S$ es el subconjunto de $A$ formado por todas las primeras componentes de los pares ordenados que pertenecen a la relación. Al dominio lo simbolizamos como el siguiente conjunto $D\left(S\right)=\left\{x\in A tal que ∃y\in B;(x,y)\in S\right\}$.

Relaciones de $R$ en $R$.

Generalmente en este texto, utilizaremos relaciones de $A$ en $B$, donde $A$ y $B$ son subconjuntos de $R$.

Relación inversa.

Definición.- Sea la relación $S$ de $A$ en $B$: $S=\left\{\left(x,y\right)\in A×B tal que (x,y)\in S\right\}$ la relación inversa de $S$ denotado por $S^{-1}$ se define del modo siguiente.

 $S^{-1}=\left\{\left(y,x\right)\in B×A tal que (x,y)\in S\right\}$ es decir, $S^{-1}$ es la relación de $B$ en $A$ que se obtiene a partir de la relación $S$ intercambiando las componentes de los elementos de $S$.

Observaciones:

1.- De la definición de $S^{-1}$, $(y,x)\in S^{-1}\leftrightarrow (x,y)\in S$

2.- $D\left(S^{-1}\right)=R(S)$ y $R\left(S^{-1}\right)=D(S)$

3.- $(S^{-1})^{-1}=S$.

Gráficos de una relación de $R$ en $R$.

Definición.- Llamaremos gráfica de una relación de $R$ en $R$ al conjunto de puntos $P(x,y)$ cuyas coordenadas satisfagan a dicha relación:

 $E\left(x,y\right)=0 ∨ E\left(x,y\right)<0 ∨ E\left(x,y\right)>0 ∨ E\left(x,y\right)\leq 0 ∨ E\left(x,y\right)\geq 0$

Discusión de la gráfica de una relación.- Para trazar la gráfica de una relación dada por la ecuación $E\left(x,y\right)=0$, especificamos los siguientes criterios.

 Intersecciones con los ejes coordenados:

 Intersección con el eje $X$: $E\left(x,y\right)∩eje X= \left\{\left(x,y\right)\in R^{2} tal que y=0 \right\}=P$

 Para hallar el punto $P$ de intersección con el eje $X$ se hace $y=0$ en la ecuación $E\left(x,y\right)=0$ y se resuelve.

 Intersección con el eje $Y$: $E\left(x,y\right)∩eje Y= \left\{\left(x,y\right)\in R^{2} tal que x=0 \right\}=Q$

 Para hallar el punto $Q$ de intersección con el eje $Y$ se hace x$=0$ en la ecuación $E\left(x,y\right)=0$ y se resuelve.

 Simetría con respecto a los ejes coordenados:

 Simetría con respecto al eje $X$

 Existe simetría con respecto al eje $X$ si se cumple $E\left(x,y\right)=E\left(x,-y\right)$

 Simetría con respecto al eje $Y$

 Existe simetría con respecto al eje $Y$ si se cumple $E\left(x,y\right)=E\left(-x,y\right)$

 Simetría con respecto al origen.

 Existe simetría con respecto al origen si se cumple $E\left(x,y\right)=E\left(-x,-y\right)$

 Extensión de la curva.

 Consiste en determinar el dominio y rango de la relación.

 Ecuaciones de las asíntotas:

 Asíntotas Verticales.- La recta $x=a$, es una asíntota vertical de la relación $E\left(x,y\right)=0$, si para cada $(x,y)\in E(x,y)$, se tiene que para $"y"$ bastante grande la distancia de $"x"$ a $"a"$ es decir $\left|x-a\right|$ es muy pequeño.

 Se despeja $y=\frac{f(x)}{g(x)}$, en $E\left(x,y\right)=0$. Las A.V. se obtienen de $g\left(x\right)=0$.

 Asíntotas Horizontales.- La recta y$=b$, es una asíntota horizontal de la relación $E\left(x,y\right)=0$, si para cada $(x,y)\in E(x,y)$, se tiene que para $"x"$ bastante grande la distancia de $"y"$ a $"b"$ es decir $\left|y-b\right|$ es muy pequeño.

 Se despeja $x=\frac{f(y)}{g(y)}$, en $E\left(x,y\right)=0$. Las A.V. se obtienen de $g\left(y\right)=0$.

 Tabulación.- Consiste en calcular un número determinado de pares ordenados a partir de la ecuación $E\left(x,y\right)=0$.

 Trazado de la curva.- Mapeo de los pares ordenados.

Algunos gráficos de relaciones, basados en las cónicas.

























FUNCIONES

Definición.- Consideremos dos conjuntos cualquiera y  , a la relación binaria  de  en  le llamaremos función de  en  , sí y sólo sí, verifica:

 i) 

 ii) 

Definición.- Una relación $f$ de $A$ en $B$, $(f:A\rightarrow B)$, es una función sí y solo sí, a un elemento $x\in A$ le corresponde un único $y\in B$ a través de $f$. Esta definición se le conoce como “concepto intuitivo de función”

Función real de una variable real.

Definición.- Una función $f:A\rightarrow B$, donde $A$ y $B$ son subconjuntos no vacíos de $R$, se denomina función real de variable real o función de una variable real a valores reales.

Funciones Inyectiva, Suryectiva y Biyectiva.

Definición.- (Función inyectiva o uno a uno). Se dice que una función $f:A\rightarrow B$ cuyo dominio es $D$, es inyectiva, sí para cualquier $x\_{1},x\_{2}\in D$ con $x\_{1}\ne x\_{2}$ se tiene que $f(x\_{1})\ne f(x\_{2})$. Esta definición es equivalente a la siguiente. $f:A\rightarrow B$ es inyectiva si $f(x\_{1})=f(x\_{2})$, con $x\_{1},x\_{2}\in D$ implica que $x\_{1}=x\_{2}$.

Definición.- (Función suryectiva o sobreyectiva) Se dice que una función $f:A\rightarrow B$ es suryectiva, sí para todo $y\in B$, existe $x\in A$, tal que $f\left(x\right)=y$. En otras palabras $f:A\rightarrow B$ es suryectiva sí $Img f=B$.

Definición.- (Función biyectiva) se dice que una función $f:A\rightarrow B$ es biyectiva cuando es inyectiva y suryectiva.

Funciones Especiales.

Función constante.- Es la función $f:R\rightarrow R$, definida por $f\left(x\right)=c, ∀x\in R$, donde $c$ es una constante real.

 $D\left(f\right)=R$; $R\left(f\right)=3$; La gráfica es una recta horizontal.

Función Identidad de $R$ .- Es la función $f:R\rightarrow R$, definida por $f\left(x\right)=x,$

 $D\left(f\right)=R$; $R\left(f\right)=R$; La gráfica es:



Función Lineal .- Es la función $f:R\rightarrow R$, definida por $f\left(x\right)=ax,$ donde $a$ es una constante diferente de cero.

 $D\left(f\right)=R$; $R\left(f\right)=R$; La gráfica es una recta oblícua que pasa por el origen, la pendiente de la recta es $a$.



Función Afin .- Es la función $f:R\rightarrow R$, definida por $f\left(x\right)=ax+b$ con $a\ne 0 ∧b\ne 0$ .

 $D\left(f\right)=R$; $R\left(f\right)=R$; La gráfica es una recta oblícua que no pasa por el origen cuya ordenada en el origen es $b$. La pendiente de la recta es $a$.



 

Función Valor Absoluto .- Es la función $f:R\rightarrow R$, definida por $f\left(x\right)=\left|x\right|$ .

 $D\left(f\right)=R$; $R\left(f\right)=R\_{0}^{+}$

Y su gráfico está dado por:

 

Función Raíz Cuadrada .- Es la función $f:R\rightarrow R$, definida por $f\left(x\right)=\sqrt{x}$ .

 $D\left(f\right)=R\_{0}^{+}$; $R\left(f\right)=R\_{0}^{+}$

Y su gráfico está dado por:



Composición de funciones

Definición.- Dadas dos funciones  y  tales que:  y que  entonces la función compuesta  es aquella función definida por:

i) 

ii)  regla de correspondencia.

Ejercicios:

Hallar el dominio de cada una de las funciones:

1.- $f\left(x\right)=\sqrt{x^{2}-4x+3}$ 2.- $f\left(x\right)=\sqrt{1-\left|x\right|}$ 3.- $f\left(x\right)=\sqrt{\frac{x}{4-x^{2}}}$

3.- $f\left(x\right)=\sqrt{\frac{x-1}{x^{2}-5x+6}}$ 4.- $f\left(x\right)=\sqrt{\frac{2x^{2}-x-1}{x^{2}+3x}}$ 4.- $\sqrt{\frac{(x^{2}-4)(x^{2}-9)}{-x^{4}+17x^{2}-16}}$

Determinar el dominio, rango y gráfico de las siguientes funciones.

1.- $f\left(x\right)=\left\{\begin{array}{c}x^{2}, \&si x<1\\-x^{3}, \&si x\geq 1\end{array}\right.$ 2.- $f\left(x\right)=\left\{\begin{array}{c}3x-2, si-4\leq \&x\leq 4\\x, si 4<x<6\end{array}\right.$

3.- $f\left(x\right)=\left\{\begin{array}{c}\sqrt{x-2}, si \&x\geq 2\\x^{2}+2x-3, si \&x\in \left〈-1,1\right〉\end{array}\right.$ 4.- $f\left(x\right)=\left\{\begin{array}{c}x^{2}-4, \&si x<3\\2x-1, \&si x\geq 3\end{array}\right.$

5.- $\left\{\begin{array}{c}\left|x+2\right|-x si x\in \left〈-4,0\right〉\\\sqrt{4-x} si x\in \left〈0,4\right〉\\2x-8 si x\in \left〈4,\infty \right〉\end{array}\right.$ 5.- $\left\{\begin{array}{c}2\left⟦x\right⟧+2 si-5\leq x\leq 1\\\sqrt{x} si 1<x\leq 4\\6 si-7<x<-5\end{array}\right.$