

CAPÍTULO 2

TEMAS DE DINÁMICA INCLUIDOS

2.1. CONCEPTOS DE DINÁMICA ESTRUCTURAL

Desde el punto de vista de la ingeniería sísmica, el tema central de la dinámica es estudiar y entender la vibración de una estructura cuando está sujeta a una fuerza lateral u horizontal, o a un movimiento sísmico en su base (Chopra, 2001). Esto se hace a través del estudio de un modelo, que es la representación matemática de la estructura real y que adopta las propiedades la misma.

Particularmente para el estudio de las vibraciones el modelo recibe el nombre de *Oscilador* pues la estructura al ser sometida a una fuerza lateral efectúa un movimiento oscilante a manera de un péndulo.

Dentro de la dinámica estructural hay dos tipos de osciladores: de un grado de libertad (1GL) y de varios grados de libertad (VGL).

Desde el punto de vista dinámico, los grados de libertad que interesan son aquéllos en los que se consideran fuerzas generalizadas de inercia; es decir, fuerzas iguales a masa por aceleración. Por ejemplo en la figura 2.1 se muestra un marco plano con los 12 grados de libertad (lineales y angulares); sin embargo, para reducir el número de grados de libertad se considera que las fuerzas de inercia importantes son las que generan las masas m_1 y m_2 al moverse lateralmente; entonces en dinámica se habla de un sistema reducido de 2 grados de libertad, que son los desplazamientos laterales 1 y 2. (Bazan y Meli, *et. al* 1983)

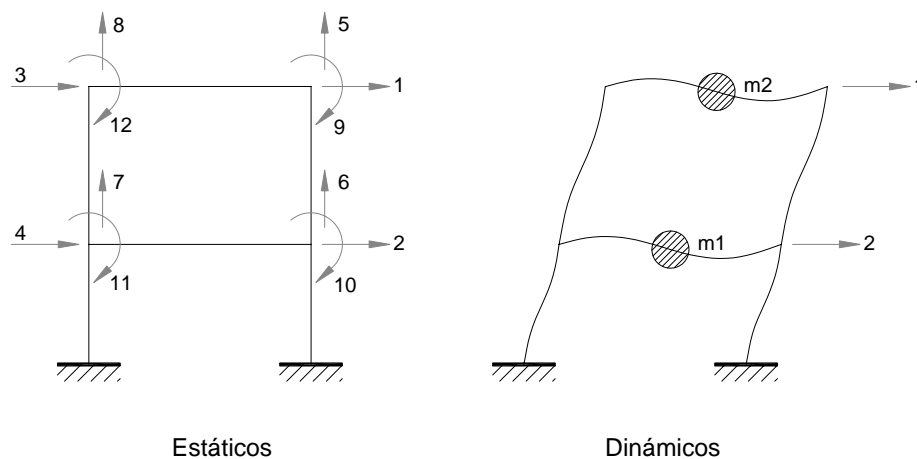


Figura 2.1 Grados de libertad

La respuesta dinámica de una estructura consiste en determinar el movimiento, velocidad y aceleraciones de su masa cuando está sometida a una fuerza lateral o a un movimiento sísmico en su base.

La respuesta dinámica depende de la magnitud y duración de la excitación, de las propiedades dinámicas de la estructura (masa, rigidez, frecuencia de vibrar y amortiguamiento) y de las características de los depósitos del suelo donde está cimentada. (Bazan y Meli, *et. al* 1983)

Las cargas gravitatorias que actúan sobre las estructuras son fuerzas estáticas, las cuales son independientes del tiempo; en cambio las fuerzas sísmicas, por efecto de la vibración del suelo, causan una respuesta dependiente del tiempo (Bazan y Meli, *et. al* 1983).

Antes de la excitación, el oscilador permanece en estado de reposo, pero una vez que comienza a moverse se generan en él fuerzas internas de inercia (f_i), de rigidez (f_s) y de amortiguamiento (f_d) que tratan de restaurar dicho estado de reposo contrarrestando a la fuerza ejercida.

$$f_s = k \cdot x \dots \dots \dots (2.1)$$

$$f_d = c \cdot \dot{x} \dots \dots \dots (2.2)$$

$$f_i = m \cdot \ddot{x} \dots \dots \dots (2.3)$$

Al hacer el equilibrio de estas fuerzas se genera la ecuación de equilibrio dinámico, que es la representación matemática del sistema. Para cada tipo de oscilador (1GL o VGL) la ecuación de equilibrio dinámico es diferente, aunque el planteamiento es el mismo.

2.2. OSCILADORES DE 1GL

El oscilador de un grado de libertad (ver figura 2.2a) es el modelo que representan a estructuras simples, es decir, que todo su peso o masa se considera concentrada en un sólo punto y está sostenida por un resorte (rigidez lateral “k” de la estructura).

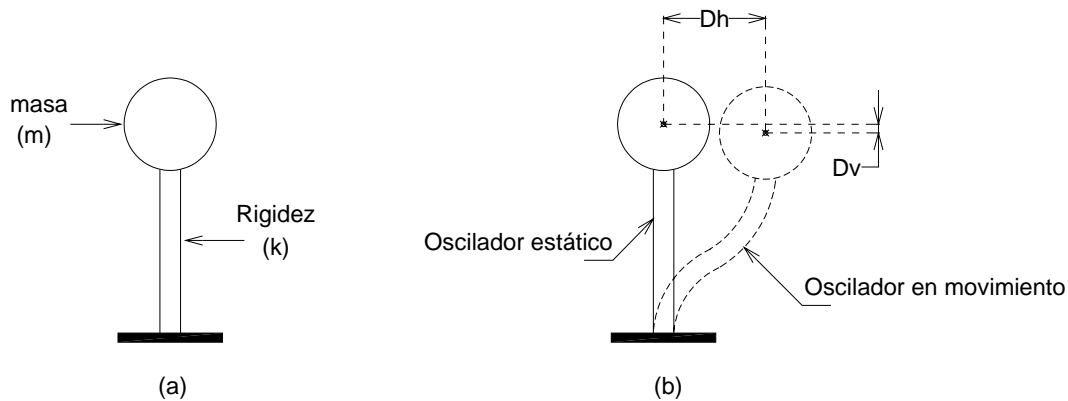


Figura 2.2 (a) Oscilador de un grado de libertad, (b) Desplazamientos del oscilador

Los grados de libertad de un oscilador son las direcciones en que la masa se puede desplazar. En la figura 2.2b se muestra el movimiento de un oscilador hacia el lado derecho; observe que la masa se desplaza en dos direcciones: horizontal (D_h) y vertical (D_v) medidas con respecto al centro de la masa.

Bajo la definición anterior (fuerzas de inercia generalizadas), este oscilador puede aproximarse como de un grado de libertad, ya que los desplazamiento verticales (D_v) son muy pequeños comparados con los horizontales (D_h); por tal motivo se desprecian quedando el oscilador de un sólo grado de libertad (1GL).

2.2.1. Ecuación de equilibrio

El equilibrio de fuerzas (ecuación 2.1 a 2.3) cuando no existe excitación alguna en los osciladores queda escrita de la siguiente manera:

$$f_I + f_D + f_S = 0 \dots\dots\dots (2.4)$$

Un caso particular de esta ecuación es cuando el sistema está sujeto a una aceleración en su base $\ddot{x}_s(t)$. Al introducir dicha aceleración a la ecuación 2.3 y a su vez sustituyendo las ecuaciones 2.1 a 2.3 en la ecuación 2.4 se obtiene la ecuación 2.5, la cual gobierna el movimiento de un oscilador de 1GL (figura 2.2a).

$$m \cdot (\ddot{x}(t) + \ddot{x}_s(t)) + c \cdot \dot{x}(t) + k \cdot x(t) = 0 \dots\dots\dots (2.5)$$

Dividiendo la ecuación 2.5 entre la masa y pasando el término de la aceleración del suelo $\ddot{x}_s(t)$ al lado derecho, se obtiene la ecuación 2.6

$$\ddot{x}(t) + \frac{c}{m} \cdot \dot{x}(t) + \frac{k}{m} \cdot x(t) = -\ddot{x}_s(t) \dots\dots\dots (2.6)$$

Definiendo las siguientes propiedades

$$\Omega^2 = \frac{k}{m} \dots\dots\dots (2.7)$$

$$\xi = \frac{c}{c_{cr}} \dots\dots\dots (2.8)$$

$$c_{cr} = 2\sqrt{k \cdot m} \dots\dots\dots (2.9)$$

Y sustituyendo las ecuaciones 2.7 a 2.9 en 2.6, la ecuación de equilibrio dinámico se muestra como:

$$\ddot{x}(t) + 2 \cdot \xi \cdot \Omega \cdot \dot{x}(t) + \Omega^2 \cdot x(t) = -\ddot{x}_s(t) \dots\dots\dots (2.10)$$

Esta última es la ecuación del equilibrio dinámico para un oscilador de 1GL cuando está sometido a una aceleración en su base. Es una ecuación diferencial de 2do grado, pues en ella intervienen la primera y segunda derivada de x, (velocidad y aceleración) con respecto al tiempo.

2.3. OSCILADORES DE VGL

Las estructuras no siempre pueden modelarse dinámicamente empleando un oscilador de un grado de libertad, y en general, es necesario modelar las estructuras como sistemas de varios grados de libertad. (Paz, 1992)

Los osciladores de varios grados de libertad (figura 2.3) representan a estructuras que su peso o masa no se puede concentrar en un sólo punto, sino que se necesario considerar un modelo de varias masas concentradas y resortes.

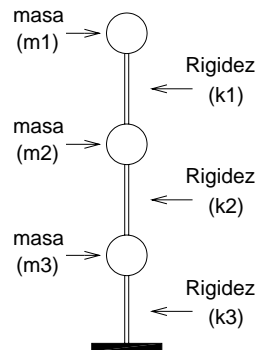


Figura 2.3 Oscilador de varios grados de libertad

En edificios es usualmente aceptable suponer que las masas están concentradas en los niveles de los pisos y que las fuerzas de inercia importantes son sólo las laterales.

El oscilador, cuando está sujeto a excitaciones que producen desplazamientos horizontales, tiene características similares a las de una viga en voladizo deformada solamente por el esfuerzo cortante. (Paz, 1992)

En este trabajo, un oscilador es de varios grados de libertad cuando el número de masas concentradas que tiene es de 2 o más. Al igual que los osciladores de 1 GL sólo se consideran los desplazamientos horizontales (Dh); por ello es posible identificar el número de grados de libertad del oscilador a través del número de masas con las que cuente.

2.3.1. Ecuación de equilibrio

De igual manera que los osciladores de 1GL, la ecuación de equilibrio dinámico para un oscilador de VGL parte del equilibrio de las fuerzas internas de la estructura (ecuaciones 2.1 a 2.3). Sólo que en esta parte las propiedades del oscilador están dadas de forma matricial.

Las fuerzas en los elementos elásticos se pueden expresar como el producto de la matriz de rigidez lateral $[k]$ por los desplazamientos laterales, es decir:

$$[F_s] = [k] \cdot \{x\} \dots \dots \dots (2.11)$$

De manera análoga las fuerzas de amortiguamiento viscoso se pueden expresar como el producto de una matriz de amortiguamiento por las velocidades, o sea como:

$$[F_D] = [c] \cdot \{\dot{x}\} \dots \dots \dots (2.12)$$

Así mismo las fuerzas de inercia del sistema quedan como:

$$[F_I] = [m] \cdot \{\ddot{x}\} \dots \dots \dots (2.12)$$

De manera análoga a los osciladores de 1GL, la ecuación del equilibrio dinámico para osciladores de VGL se puede escribir en forma matricial como:

$$[m] \cdot \{\ddot{x}(t)\} + [c] \cdot \{\dot{x}(t)\} + [k] \cdot x(t) = -[m] \cdot \{\ddot{x}_s(t)\} \dots \dots \dots (2.13)$$

2.4. TEMAS INVOLUCRADOS

Los temas incluidos en el programa son las respuestas dinámicas de los osciladores de 1GL y VGL (con propiedades definidas) ante diferentes tipos de fuerzas o cargas horizontales, por ejemplo:

- ✓ Vibración libre
- ✓ Carga impulsiva
- ✓ Carga armónica
- ✓ Carga triangular
- ✓ Carga general

Dependiendo de las propiedades que se le proporcione a los osciladores, éstos pueden ser amortiguados o no amortiguados. Además, están considerados como sistemas elástico-lineales, es decir que las propiedades de los osciladores no se modifican en ningún momento.

El programa, a partir de la solución de las ecuaciones del equilibrio dinámico permite estudiar temas como:

- ✓ Resonancia
- ✓ Deformación máxima
- ✓ Espectros de respuesta elásticos
- ✓ Fuerza cortante
- ✓ Frecuencias y modos de vibrar
- ✓ Respuestas modales
- ✓ Espectros de piso

Para conocer la respuesta dinámica de cada oscilador (1GL y VGL) es necesario resolver las ecuaciones 2.10 y 2.13; para ello se usó el método conocido como el de las ocho constantes, el cual se describe más adelante en el capítulo correspondiente a los algoritmos.