

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SANTA
FACULTAD DE INGENIERÍAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



XIV CONVENCIÓN DE INVESTIGACIÓN

**MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS Y EL USO DE
MATLAB PARA ECUACIONES ELÍPTICAS SOBRE
CONDUCTIVIDAD TÉRMICA**

Responsable: Ernesto Cedrón León
Corresponsables: Carlos Marquina Alvarado
Lizandro Baldomero Reyna Zegarra

Nuevo Chimbote, septiembre del 2012

Formulación del Problema (1)

EL OBJETO DE ESTUDIO

- El objeto de estudio ha sido las ecuaciones diferenciales parciales lineales de segundo orden de tipo elíptico, que aparecen entre otros casos en problemas estacionarios sobre la conductividad térmica, su solución se enfoca por el método de diferencias finitas que consiste de dos etapas principales: **La primera es la sustitución de la ecuación diferencial y las condiciones complementarias (contorno) por un sistema de ecuaciones algebraicas definidas sobre la red**; la segunda es la solución del sistema obtenido de ecuaciones definidas sobre la red.

Planteamiento del Problema (2)

- El método de diferencias finitas, a pesar de su sencillez teórica, exige resolver diversas dificultades, desde la elección de la red, la forma de escribir el esquema en diferencias, hasta el análisis de la convergencia de la resolución del problema en diferencias a la del problema inicial.
- Considerando que actualmente las soluciones a diversos problemas de la matemática se realiza mediante programas computacionales, en nuestro caso como el propósito de la investigación es usar MATLAB para la solución en diferencias finitas de las ecuaciones diferenciales elípticas. Por ello nos planteamos el siguiente problema:
El problema se enuncia de la siguiente manera:
- ¿Cómo usar el programa computacional de matemática MATLAB en la solución de una ecuación diferencial lineal elíptica sobre problemas estacionarios de conductividad térmica mediante el método de diferencias finitas?

Importancia:

- La investigación es importante, pues las ecuaciones diferenciales modelan diversos fenómenos de naturaleza física, en particular los problemas estacionarios sobre conductividad térmica y su difusión. Su solución aproximada mediante el método en diferencias finitas al ser ejecutado mediante un programa computacional permite obtener de manera más rápida el resultado y además mostrarla gráficamente.

OBJETIVOS

Objetivo General:

- Usar el programa computacional técnico MATLAB en la solución de ecuaciones diferenciales elípticas sobre conductividad térmica mediante el método de diferencias finitas.

Objetivos Específicos:

1. Analizar la deducción de la ecuación diferencial de tipo elíptico sobre problemas estacionarios de conductividad térmica.
2. Resolver la ecuación diferencial mediante el método en diferencias finitas usando el programa computacional MATLAB.

CONTENIDO DEL ESTUDIO

Capítulo I

- Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden de tipo Elíptico

Capítulo II

- El Método de Diferencias Finitas Para las Ecuaciones Elípticas

Capítulo III

- Solución de las Ecuaciones Elípticas mediante Diferencias Finitas

Capítulo IV

- Método iterativo para resolver la ecuación elíptica de Laplace

Discusión

Conclusiones

Referencias Bibliográficas

ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden de tipo Elíptico

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n B_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + C(x)u = f(x) \quad (1)$$

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ pertenece al espacio euclideo n-dimensional E_n

A_{ij} , B_i , C y f son funciones de las variables independientes x_1, x_2, \dots, x_n .

A_{ij} , B_i , C son medibles y acotadas.

La ecuación (1) se dice que es elíptica en un punto \bar{x} , si

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(\bar{x}) \xi_i \xi_j \neq 0, \quad |\xi| \neq 0, \quad \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in \mathbb{R} \quad (2)$$

$$|\xi| = \left(\sum_i \xi_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

espacio bidimensional ($n = 2$), la ecuación (1) es de la forma

$$\sum_{i,j=1}^2 A_{ij}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^2 B_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + C(x)u = f(x) \quad (5)$$

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ pertenece al espacio euclideo 2-dimensional E_n

Desarrollándola, tenemos

$$A_{11}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1 \partial x_1} + A_{12}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1 \partial x_2} + A_{21}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1 \partial x_1} + A_{22}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2 \partial x_2} + B_1(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} + B_2(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} + C(x)u = f(x) \quad (6)$$

Reinscribamos la ecuación (6), considerando que las segundas derivadas parciales son continuas, por lo tanto son iguales; además expresando las variables x_1, x_2 como x, y respectivamente, podemos expresar la ecuación (6) como

$$A \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} + 2D \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + 2E \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + F u(x, y) = 0$$

(7)

$$u(x) + 2D \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + 2E \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + F u(x, y) = 0$$

(7)

donde A, B, G, D, E, F son contantes, es una ecuación de segundo orden en derivadas parciales lineal, homogénea.

Por comparación con una cónica cuya ecuación se expresa como,

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Bxy + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

Si:

$AC - B^2 > 0$, la ecuación es elíptica;

$AC - B^2 = 0$, la ecuación es parabólica;

$AC - B^2 < 0$, la ecuación es hiperbólica.

$$A \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} + 2D \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + 2E \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + F u(x, y) = 0$$

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Bxy + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

$$AC - B^2 > 0$$

Varia del calor en cierto volumen.

Consideremos un volumen G con una superficie Γ del espacio tridimensional \square^3 , donde un punto se determina por tres variables: $P(x, y, z)$. La conductividad térmica o proceso de transferencia de calor se determina por la ley de Fourier “el vector de densidad de un flujo calorífico \mathbf{W} es proporcional al gradiente de temperatura $u(P) = u(x, y, z)$, de tal modo que

$$\mathbf{W} = -k(P) \text{grad}(u) = -k(P) \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad | \quad (1)$$

Donde $k(P)$ es el coeficiente de conductividad térmica. La densidad del flujo calorífico es igual a la cantidad de calor que pasa en la unidad de tiempo a través de la unidad de superficie isotérmica.

La ecuación de balance térmico para cierto volumen V enteramente contenido dentro de G con superficie S . Consideremos que dentro de V existen fuentes de calor distribuidos con la densidad $f(x, y, z)$, de donde $f(P)dV$ es la cantidad de calor desprendida en el volumen dV .

...ción del vector \mathbf{W} sobre la normal exterior \mathbf{n} a la superficie S , entonces según la ecuación de balance térmico: el flujo calorífico que pasa a través de S debe ser igual a la cantidad de calor desprendida en el volumen V , es decir:

$$\iint_S W_n dS = \iiint_V f(P) dV \quad (2)$$

Utilizando el teorema de la divergencia (fórmula de Ostrogradsky)

$$\iint_S W_n dS = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{W} dV$$

Lo cual reemplazando en la ecuación (2), ésta se expresa en la forma:

$$\iiint_V (\operatorname{div} \mathbf{W} - f(P)) dV = 0 \quad (3)$$

que el volumen V es arbitrario, de la ecuación (3) se deduce que

$$\operatorname{div} \mathbf{W} = f(P) \quad (4)$$

Reemplacemos en ésta última ecuación el vector de densidad de flujo calorífico dado por (1), así

$$\operatorname{div}(-k(P)\operatorname{grad}(u)) = f(P)$$

$$\operatorname{div}\left(-k(P)\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right) = f(P) \quad |$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \bullet k(P)\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) = -f(P), \text{ desarrollando el producto}$$

escalar, se tiene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{1}{k(x, y, z)} f(x, y, z)$$

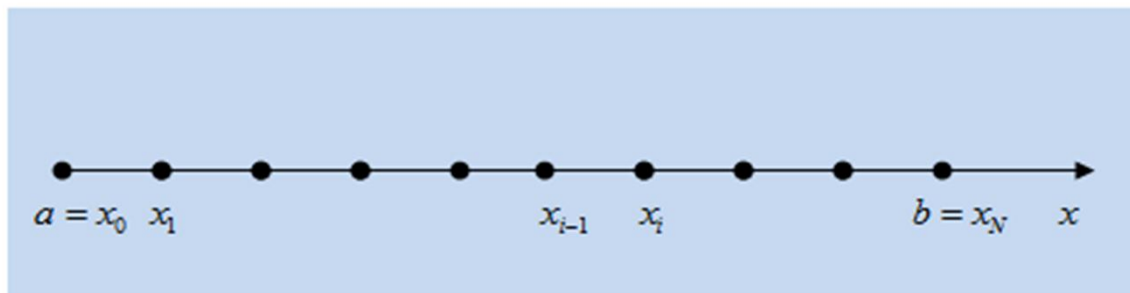
EL MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS PARA LAS ECUACIONES ELÍPTICAS

Descripción. Es un método que modifica la variación continua de los argumentos (que puede ser un segmento, un rectángulo u otra región) sustituyéndolo por un conjunto finito de puntos (nodos) llamado red. Las derivadas que forman parte de la ecuación diferencial y de las condiciones de frontera, se sustituyen (se aproximan) por razones en diferencias, es decir por combinaciones lineales de los valores de la función en ciertos nodos de la red. Por lo tanto el problema de contorno para la ecuación diferencial se sustituye por un sistema de ecuaciones algebraicas (o esquema en diferencias) lineales.

sobre un segmento

Para obtener una solución en $[a, b]$ dividimos el intervalo en N partes iguales de longitud h . Hacemos $x_0 = a$, $x_N = b$ y definimos

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 1, 2, \dots, N-1$$



como los puntos interiores de la red. Los valores correspondientes de la función en estos puntos de la red se denotan por

$$y_i = y(x_0 + ih), \quad i = 0, 1, 2, \dots, N$$

En los puntos interiores de la red la ecuación diferencial a aproximar es

$$y''(x_i) = f(x_i, y_i, y_i')$$

tenemos que se tiene el siguiente problema con condiciones a la frontera

$$\begin{cases} y''(x) + f(x)y' + g(x)y = q(x) \\ y(x_0) = \alpha, \quad y(x_N) = \beta \end{cases}$$

La ecuación equivalente en diferencias finitas será

$$\frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))}{h^2} + f(x_i) \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h} + g(x_i)y(x_i) = q(x_i)$$

cambiando i por n y usando una notación equivalente $y(x_{i+1}) = y_{i+1}$, tenemos

$$\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} + f(x_n) \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} + g(x_n)y(x_n) = q(x_n) \quad , n = 1, 2, \dots, N-1$$

Reordenando la ecuación, tenemos

$$\left(1 + \frac{h}{2}f_n\right)y_{n+1} + (-2 + h^2g_n)y_n + \left(1 - \frac{h}{2}f_n\right)y_{n-1} = h^2q(x_n) \quad , n = 1, 2, \dots, N-1$$

Puesto que y_0 y y_N están dadas por las condiciones de frontera, tenemos un sistema

de $N-1$ ecuaciones lineales con $N-1$ incógnitas, es decir,

$$\begin{cases} (-2 + h^2 g_1) y_1 = h^2 q_1 - \left(1 - \frac{h}{2} f_1\right) \alpha \\ (-2 + h^2 g_2) y_2 + \left(1 - \frac{h}{2} f_2\right) y_1 = h^2 q_2 \\ \vdots \\ \left(1 + \frac{h}{2} f_{N-2}\right) y_{N-1} + (-2 + h^2 g_{N-2}) y_{N-2} + \left(1 - \frac{h}{2} f_{N-2}\right) y_{N-3} = h^2 q_{N-2} \\ -(2 - h^2 g_{N-1}) y_{N-1} + \left(\frac{1}{2} - \frac{h}{2} f_{N-1}\right) y_{N-2} = h^2 q_{N-1} - \left(1 + \frac{h}{2} f_{N-1}\right) \beta \end{cases}$$

Los valores de $f(x)$, $g(x)$, $q(x)$ son conocidos: las incógnitas son

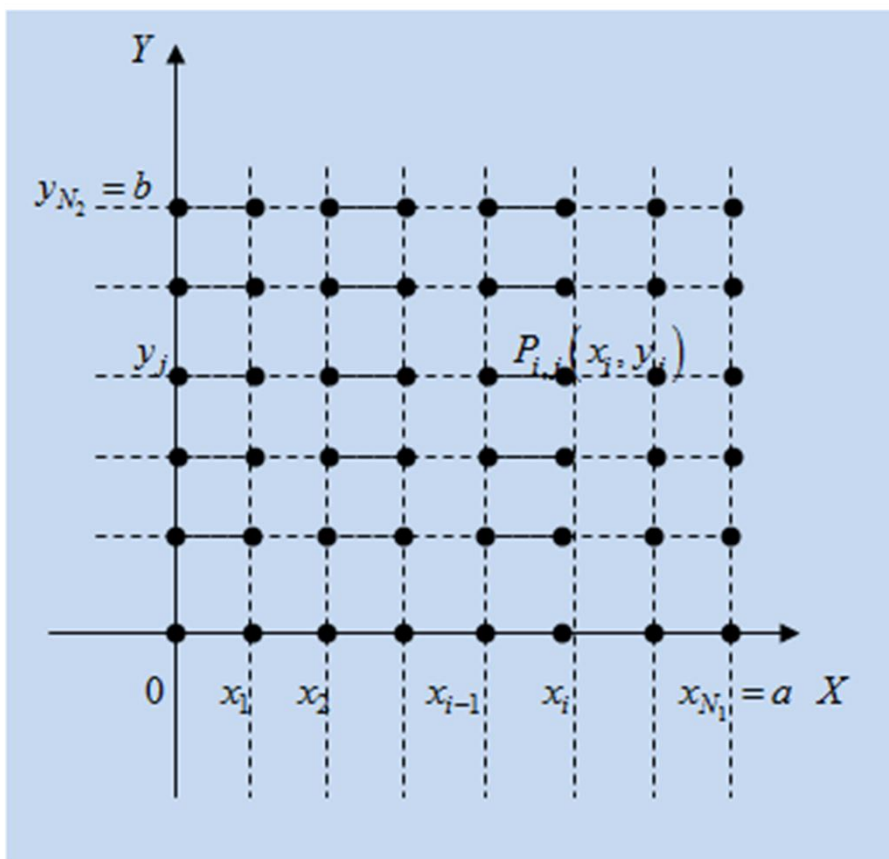
y_1, y_2, \dots, y_{N-1} las encontramos por cualquiera de los métodos numéricos para

sistemas de ecuaciones lineales. En forma matricial el sistema es $My = I$ donde

$y = (y_1, y_2, \dots, y_{N-1})^T$, M es la matriz de los coeficientes de orden $(N-1)$

$$M = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} B_1 & C_1 & \dots & \dots & \dots \\ A_2 & B_2 & C_2 & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & C_{N-2} \\ \dots & \dots & \dots & A_{N-1} & B_{N-1} \end{bmatrix}$$

sobre un rectángulo



Red sobre un rectángulo

b. Red sobre un rectángulo

Supongamos que la variación de los argumentos de la función desconocida de la ecuación diferencial es un rectángulo $D = \{P(x, y) / 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$ en un plano XY ; Construyamos en los segmentos $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$ una red en base a una partición de los lados del rectángulo, la red la denotamos por $\bar{\omega}$

$$\bar{\omega}_k = \{P(x_i, y_j) / i = 0, 1, 2, \dots, N_1, j = 0, 1, 2, \dots, N_2\}$$

El segmento $0 \leq x \leq a$ lo dividimos como

$$\bar{\omega}_x = \{x_0 = 0, x_i = x_0 + ih_1, x_i = a, / i = 0, 1, 2, \dots, N_1\}$$

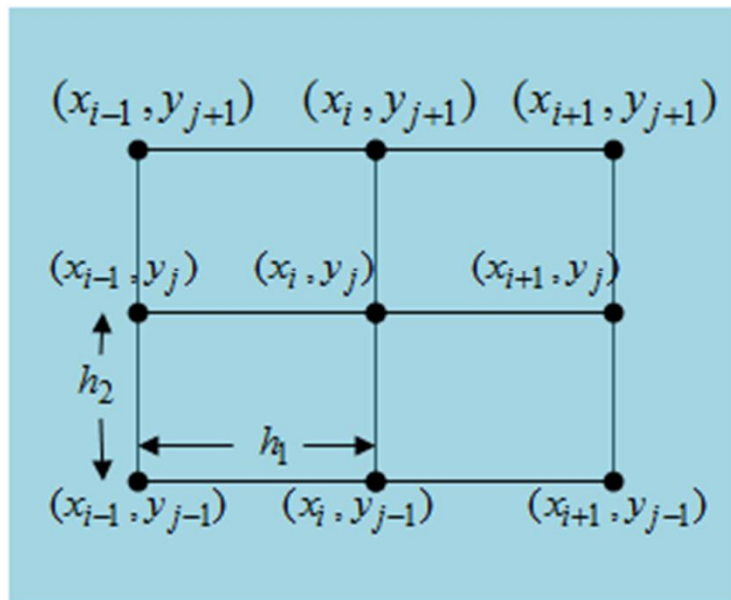
El segmento $0 \leq y \leq b$ lo dividimos como

$$\bar{\omega}_y = \{y_0 = 0, y_j = y_0 + jh_2, y_j = a, / j = 0, 1, 2, \dots, N_2\}$$

con los pasos $h_1 = \frac{a}{N_1}, h_2 = \frac{b}{N_2}$.

El conjunto de los nodos ubicados en los puntos $P_{i,j}(x_i, y_j)$, con las coordenadas $x_i = x_0 + ih_1$ y $y_j = y_0 + jh_2$ la llamamos red en el rectángulo D

te de la red, en éste caso nueve nodos.



Diferencias para la primera derivada parcial respecto a x :

Hacia adelante

$$u_x(x_i, y_j) \cong \frac{u(x_i + h_1, y_j) - u(x_i, y_j)}{h_1} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_1}$$

Error

$$u_x(x_i, y_j) = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_1} - \frac{h_1}{2} u_{xx}(x_i + \theta h_1, y_j), \quad 0 < \theta < 1$$

Hacia atrás

$$u_x(x_i, y_j) \cong \frac{u(x_i, y_j) - u(x_i - h_1, y_j)}{h_1} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_1}$$

Diferencias simétricas

$$u_x(x_i, y_j) \cong \frac{u(x_i + h_1, y_j) - u(x_i - h_1, y_j)}{2h_1} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h_1}$$

$$u_x(x_i, y_j) = \frac{u(x_i + h_1, y_j) - u(x_i - h_1, y_j)}{2h_1} - \frac{h_1^2}{6} u_{xxx}(\theta, y_j), \theta \in]x_i - h_1, x_i + h_1[$$

Se sustituyen las derivadas parciales de la ecuación por diferencias finitas basadas en la discretización de la placa como una malla de puntos discretos, transformando la EDP en una ecuación algebraica de diferencias

$$u_{xx}(x_i, y_j) \cong \frac{u_x(x_i + h_1, y_j) - u_x(x_i, y_j)}{h_1} \cong \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_1^2}$$

$$u_{yy}(x_i, y_j) \cong \frac{u_y(x_i, y_j + h_2) - u_y(x_i, y_j)}{h_2} \cong \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_2^2}$$

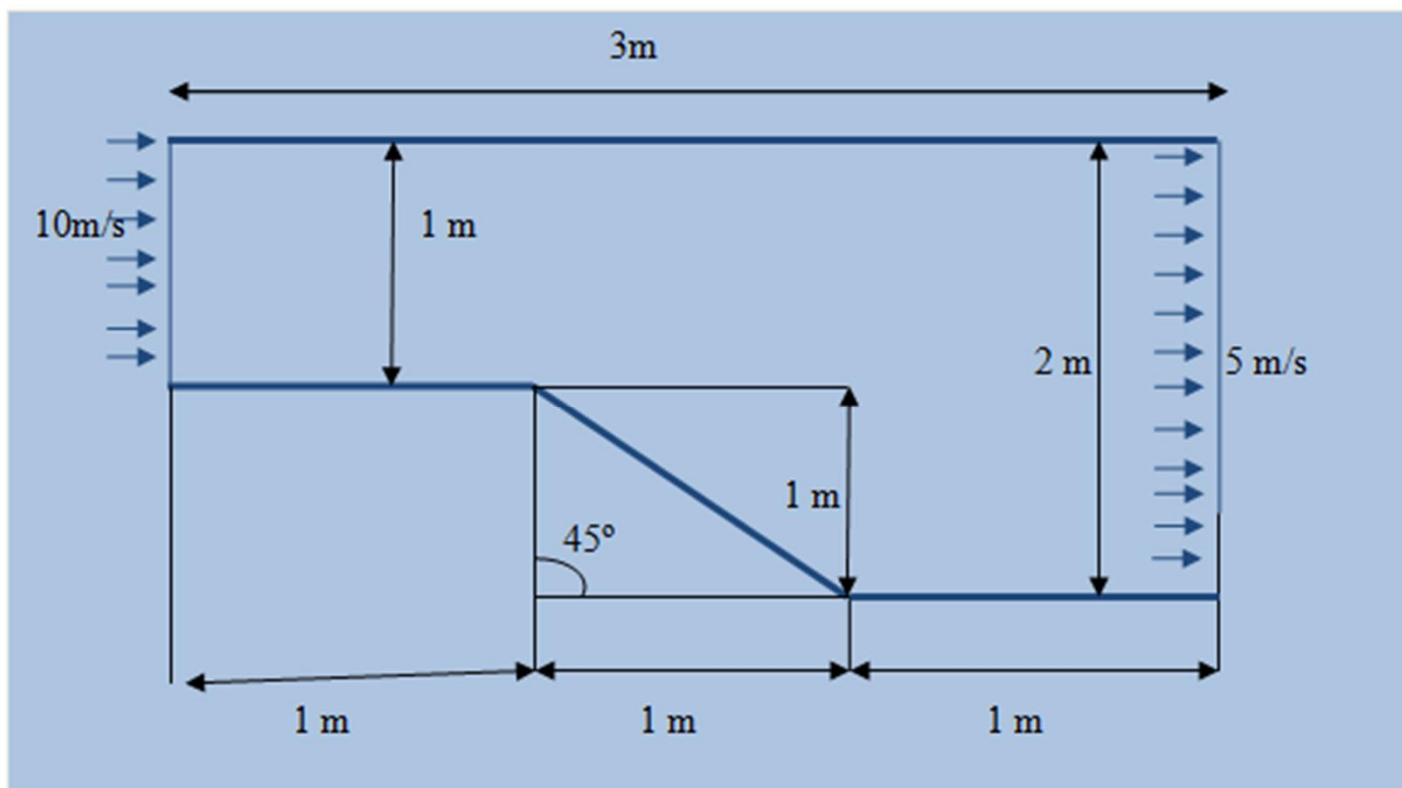
Error

$$u_{xx}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i - h_1, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i + h_1, y_j)}{h_1^2} - \frac{h_1^2}{12} u_{xxxx}(\theta, y_j), \theta \in]x_i - h_1, x_i + h_1[$$

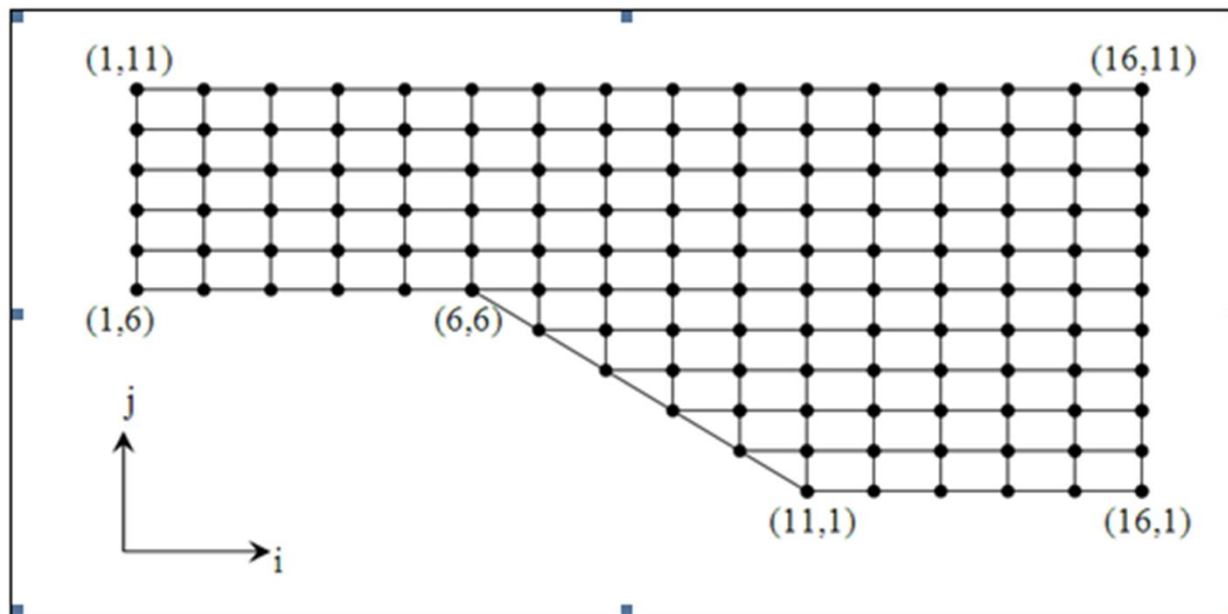
formas geométricas

En situaciones reales, para una ecuación diferencial $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$, donde ψ se

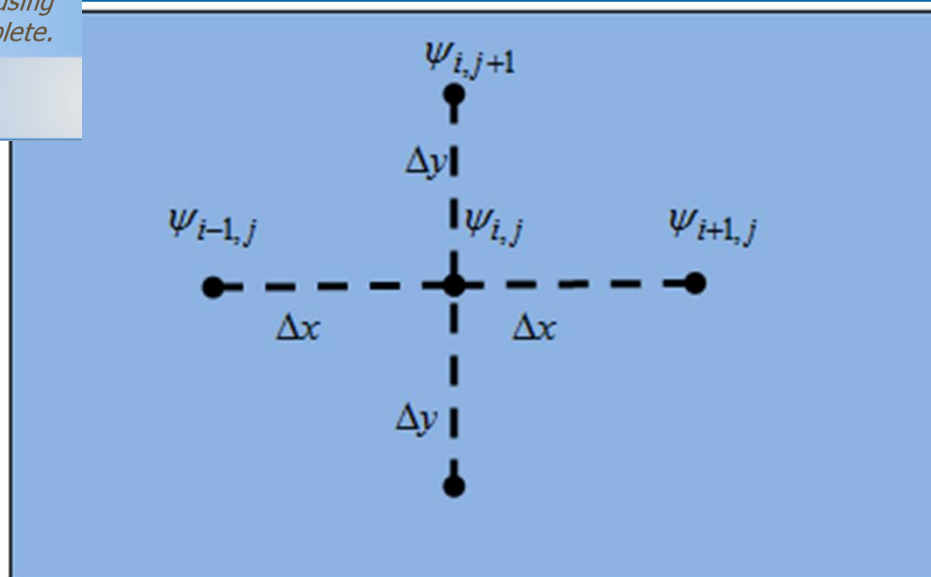
denomina función de corriente, con sus respectivas condiciones de frontera, la región sobre la que se estudia el fenómeno puede tener otra forma geométrica, por ejemplo en (White, 2001) se tiene un ducto con una expansión de 45° según la siguiente figura



método de diferencias finitas puede ser como se muestra en la
nodos internos, para cada nodo se tiene que encontrar una
$$+ \psi_{i,j-1} + \psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j}.$$



Tomado de Sánchez-Mares (2004)



En el esquema anterior los subíndices i y j denotan la posición del nodo en el mallado y ψ representa el valor de la función de corriente en cada nodo. Por lo tanto,

$$\psi_{i,j} = \psi(x_0 + i\Delta x, y_0 + j\Delta y)$$

(x_0, y_0) , es la posición inicial de la función de corriente en el eje de coordenadas cartesianas y Δx , Δy es un incremento en la dirección de x e y .

La aproximación algebraica para la derivada $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ y $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$ en notación indicial pueden

ser:
$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \approx \frac{1}{\Delta x} (\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}) \quad , \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \approx \frac{1}{\Delta x^2} [\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}]$$

SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES ELÍPTICAS MEDIANTE DIFERENCIAS FINITAS

Consideremos la Ecuación de Laplace $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$ que rige la transferencia de calor a través de una placa rectangular delgada definida sobre el rectángulo $0 < x < a$, $0 < y < b$. Consideremos además que la transferencia de calor es limitada a las dimensiones x e y , que no hay fuentes ni sumideros de calor (en caso contrario se tiene una ecuación de Poisson)

Condiciones de contorno

$$u(x, 0) = f_1(x)$$

$$u(x, b) = f_2(x)$$

$$u(0, y) = g_1(y)$$

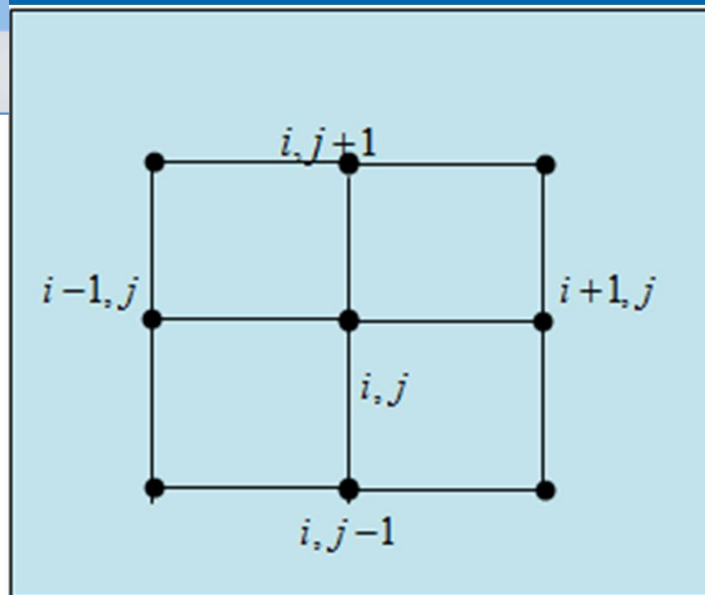
$$u(a, y) = g_4(y)$$

En particular consideremos las condiciones de Dirichlet en los bordes (frontera)

$$u(x, 0) = 0 \quad , \quad u(x, 4) = 80$$

$$u(0, y) = 20 \quad , \quad u(4, y) = 180$$

Tomemos una red cuadrada de nueve nodos internos y usando las diferencias centrales basadas según el esquema de la red con pasos de $\Delta x = h_1$ y $\Delta y = h_2$ para cada nodo y según la figura siguiente son:



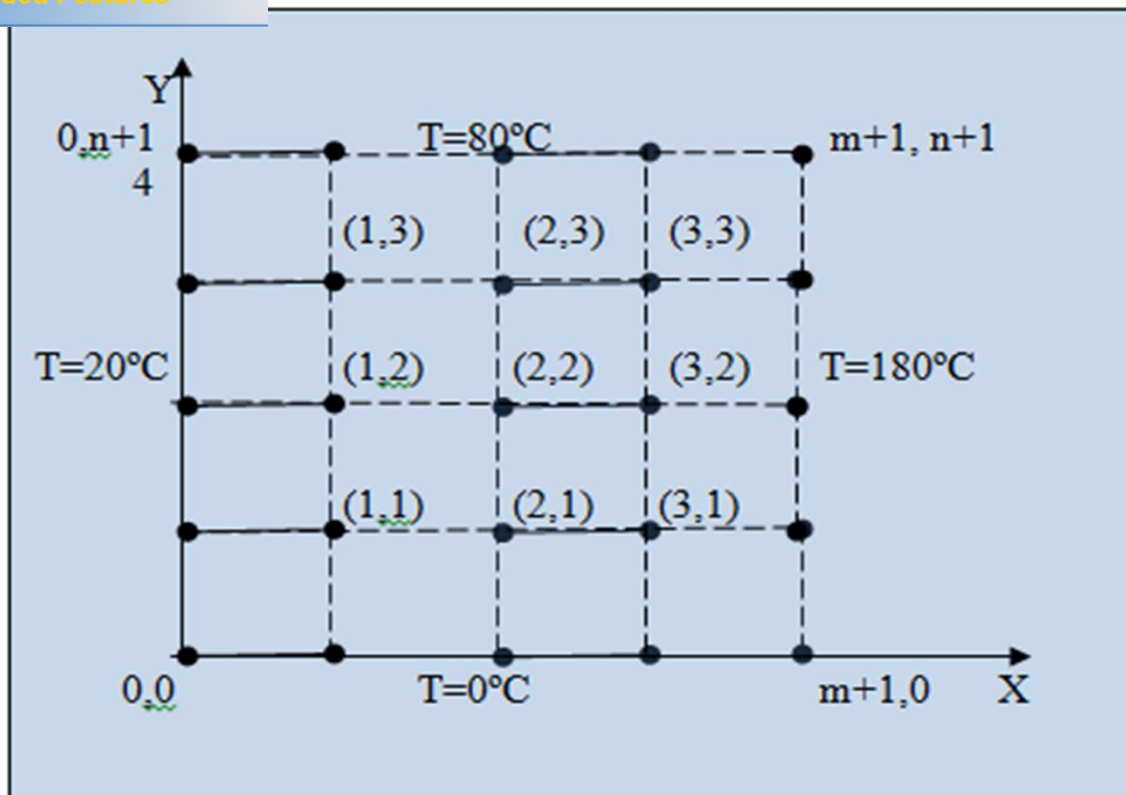
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2}$$

Con errores de $\varphi(\Delta x^2)$ y $\varphi(\Delta y^2)$ respectivamente.

Para una red cuadrada con $h_1 = h_2$, para cada uno de los nodos de la red se cumple:

$$T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j} = 0$$

ada con 9 nodos internos, calculamos el balance de energía en cada



Para el nodo (1,1) se tiene

$$T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j} = 0$$

$$T_{2,1} + T_{0,1} + T_{1,2} + T_{1,0} - 4T_{1,1} = 0 \quad , \quad \text{utilizando las condiciones de borde } T_{0,1} = 20 \quad ,$$

$$T_{1,0} = 0 \quad , \quad \text{y reemplazando}$$

$$4T_{1,1} - T_{2,1} - T_{1,2} = 20$$

$$\begin{array}{rcccccccc}
 -T_{1,2} & & & & & & & & = 20 \\
 & -T_{2,2} & & & & & & & = 0 \\
 & & -T_{3,2} & & & & & & = 180 \\
 -T_{1,1} & & & 4T_{1,2} & -T_{2,2} & & -T_{1,3} & & = 20 \\
 & -T_{2,1} & & -T_{1,2} & 4T_{2,2} & -T_{3,2} & & -T_{2,3} & = 0 \\
 & & -T_{3,1} & & -T_{2,2} & 4T_{3,2} & & & -T_{3,3} = 180 \\
 & & & -T_{1,2} & & & 4T_{1,3} & -T_{2,3} & = 100 \\
 & & & & -T_{2,2} & & -T_{1,3} & 4T_{2,3} & -T_{3,3} = 80 \\
 & & & & & -T_{3,2} & & -T_{2,3} & 4T_{3,3} = 260
 \end{array}$$

el cual expresándolo en forma matricial, se tiene:

$$\begin{bmatrix}
 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -2 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 T_{1,1} \\
 T_{2,1} \\
 T_{3,1} \\
 T_{1,2} \\
 T_{2,2} \\
 T_{3,2} \\
 T_{1,3} \\
 T_{2,3} \\
 T_{3,3}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 20 \\
 0 \\
 180 \\
 20 \\
 0 \\
 80 \\
 100 \\
 80 \\
 260
 \end{bmatrix}
 \rightarrow
 \begin{bmatrix}
 T_{1,1} \\
 T_{2,1} \\
 T_{3,1} \\
 T_{1,2} \\
 T_{2,2} \\
 T_{3,2} \\
 T_{1,3} \\
 T_{2,3} \\
 T_{3,3}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 27.142 \\
 45.357 \\
 84.285 \\
 43.214 \\
 70 \\
 111.78 \\
 55.714 \\
 79.642 \\
 112.85
 \end{bmatrix}$$

1. MÉTODO ITERATIVO PARA RESOLVER LA ECUACIÓN ELÍPTICA DE LAPLACE

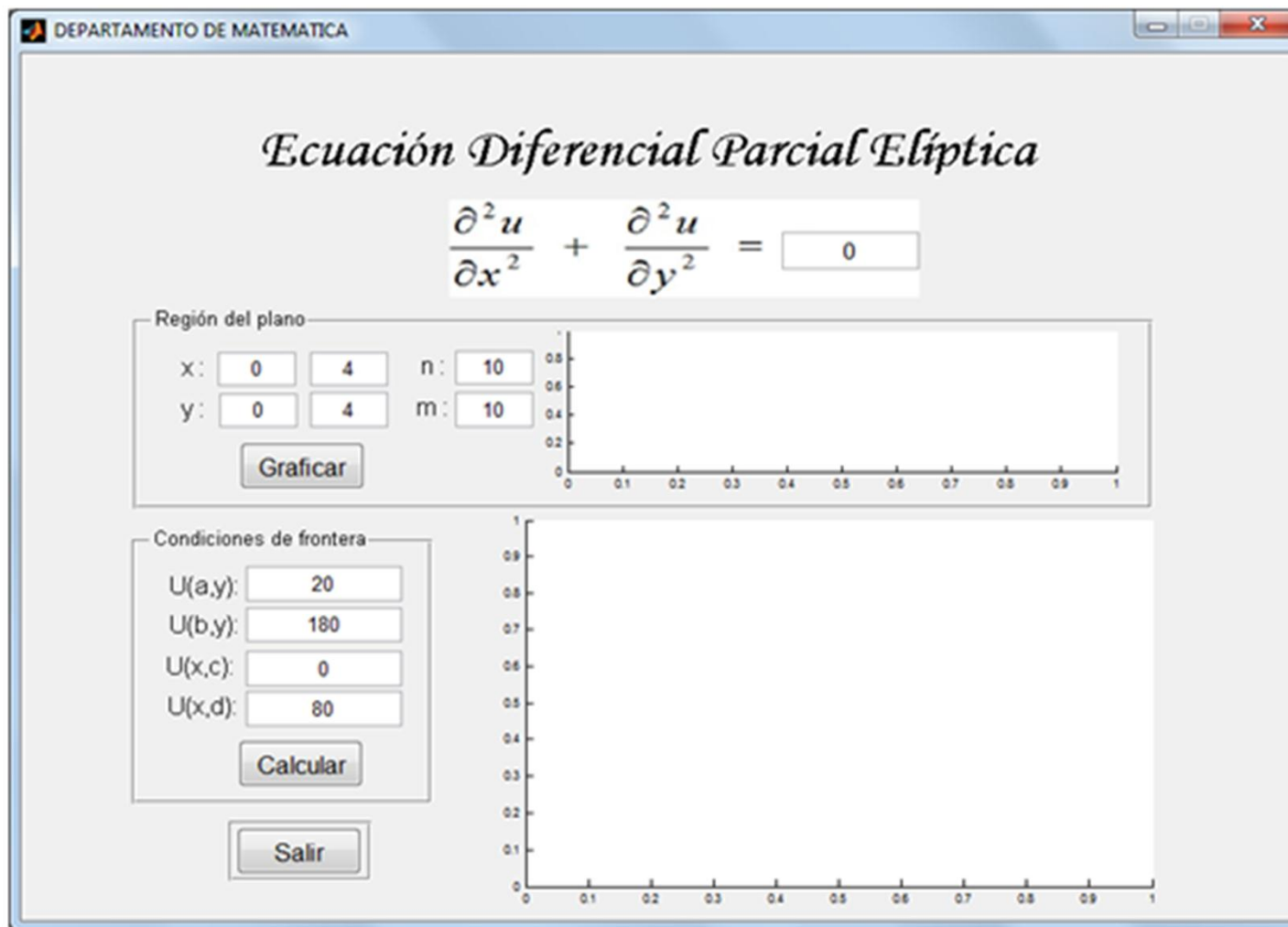
En lugar de realizar los cálculos en forma analítica, lo realizamos mediante una programación, con un criterio de convergencia de 0.000001, sobre un rectángulo de lados $a = 4$, $b = 4$ y un número máximo de iteraciones de 3000 y usando MATLAB.

El programa para el problema anterior es el siguiente:

```
% --- Executes on button press in pushbutton1.
function pushbutton1_Callback(hObject, eventdata, handles)
a=str2double(get(handles.edit1,'string'));
b=str2double(get(handles.edit2,'string'));
n=str2double(get(handles.edit3,'string'));
c=str2double(get(handles.edit4,'string'));
d=str2double(get(handles.edit5,'string'));
m=str2double(get(handles.edit6,'string'));
%a=0; b=0.5; c=0; d=0.5; n=5; m=4;
h=(b-a)/n; k=(d-c)/m;
x=a:h:b; y=c:k:d;
[x y]=meshgrid(x,y);
w=0*x+0*y;
axes(handles.axes2)
mesh(x,y,w)
set(handles.axes2,'xtick',[a:h:b])
set(handles.axes2,'ytick',[a:k:b])
axis([a b c d 0 1])
% --- Executes on button press in pushbutton2.
function pushbutton2_Callback(hObject, eventdata, handles)
TOL=0.000001;
MAXIT=300;
a=str2double(get(handles.edit1,'string'));
b=str2double(get(handles.edit2,'string'));
n=str2double(get(handles.edit3,'string'));
c=str2double(get(handles.edit4,'string'));
d=str2double(get(handles.edit5,'string'));
m=str2double(get(handles.edit6,'string'));
```



de la ejecución se tiene la interface, la cual lo apreciamos en el
para $n = 10$, $m = 10$



DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

Ecuación Diferencial Parcial Elíptica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Región del plano

x: n:

y: m:

Condiciones de frontera

U(a,y):

U(b,y):

U(x,c):

U(x,d):

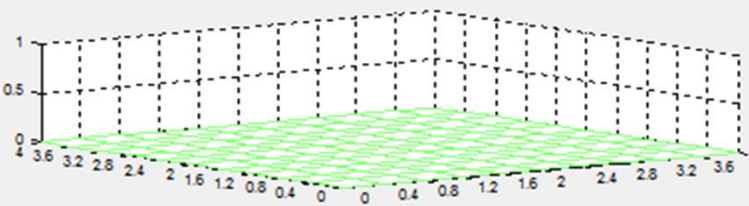
Ecuación Diferencial Parcial Elíptica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Región del plano

x: n:
 y: m:

Graficar

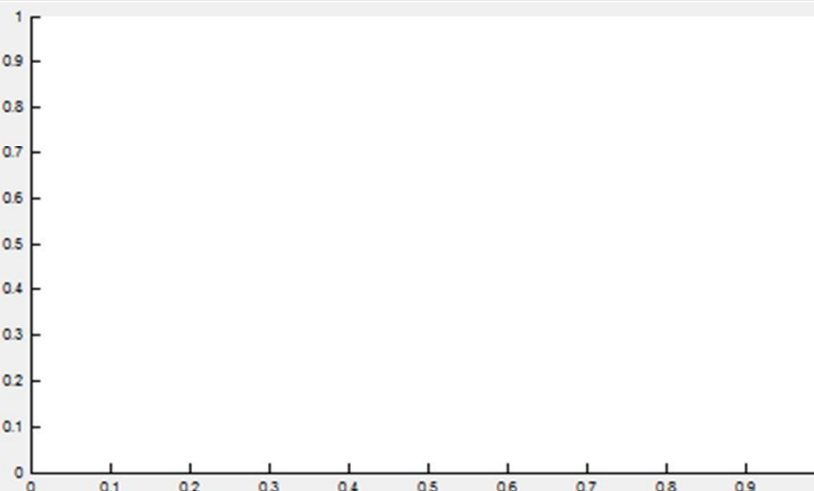


Condiciones de frontera

U(a,y):
 U(b,y):
 U(x,c):
 U(x,d):

Calcular

Salir



MATICA

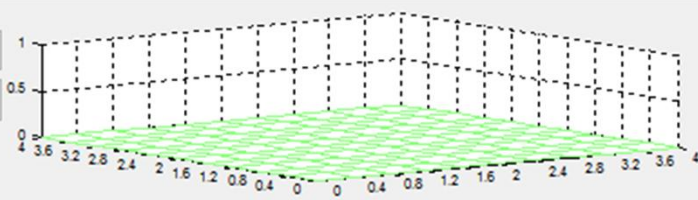
Ecuación Diferencial Parcial Elíptica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Región del plano

x: n:
y: m:

Graficar

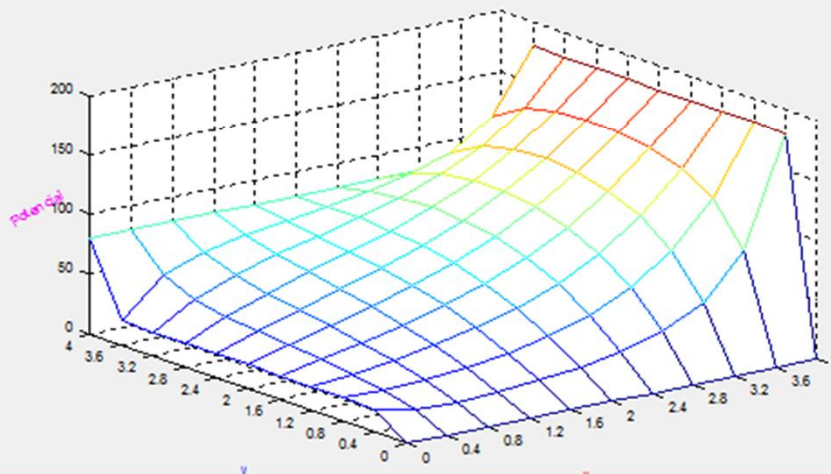


Condiciones de frontera

U(a,y):
U(b,y):
U(x,c):
U(x,d):

Calcular

Salir



Ecuación Diferencial Parcial Elíptica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

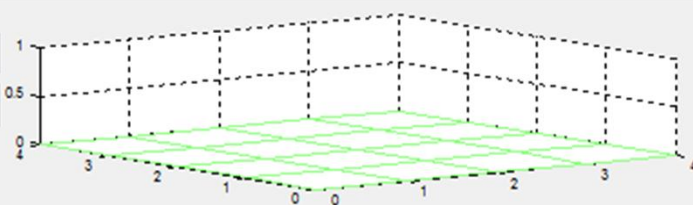
Región del plano

x:

y:

n:

m:



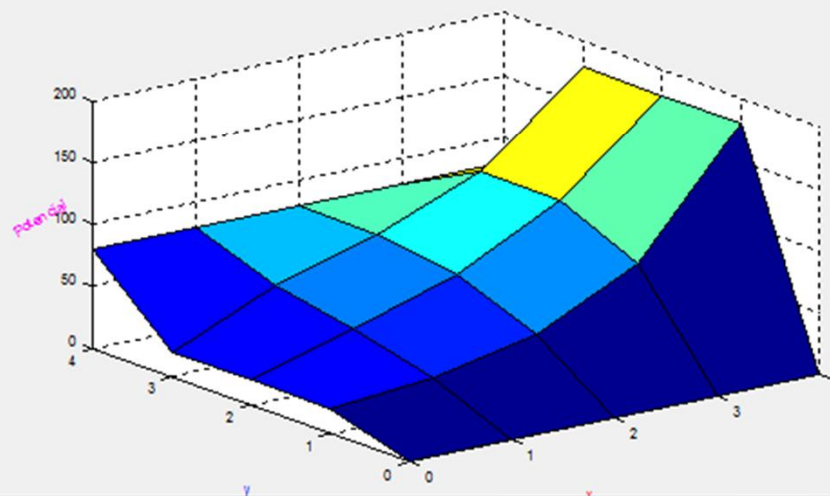
Condiciones de frontera

U(a,y):

U(b,y):

U(x,c):

U(x,d):



ión en cada uno de los nodos son:

0	0	0	0	0
20.0000	27.1429	45.3571	84.2857	180.0000
20.0000	43.2143	70.0000	111.7857	180.0000
20.0000	55.7143	79.6429	112.8571	180.0000
80.0000	80.0000	80.0000	80.0000	80.0000

Las condiciones constantes en los bordes no es muy real, ello trae una contradicción en las esquinas y que el programa lo muestra, por lo tanto tales valores no son tomados en cuenta. Si en lugar de valores constantes en las fronteras se tuviera funciones, es una situación más cercana a la realidad.

Los mismos valores en los nodos se obtiene con un cálculo manual de las diferencias en cada uno de los nodos y auxiliándose de otros programas para el cálculo del sistema de ecuaciones que se genera. De ésta forma, cuando la red es de un gran número de nodos, el cálculo es muy laborioso.

DISCUSIÓN

1. Una ecuación diferencial lineal en derivadas parciales de segundo orden con n variables independientes tiene la forma

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n B_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + C(x)u = f(x)$$

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ pertenece al espacio euclideo n -dimensional E_n

A_{ij} , B_i , C y f son funciones de las variables independientes x_1, x_2, \dots, x_n .

A_{ij} , B_i , C son medibles y acotadas.

La ecuación (1) se dice que es elíptica en un punto \bar{x} , si

Para el caso de un espacio bidimensional ($n = 2$), la ecuación (1) es de la forma

$$\sum_{i,j=1}^2 A_{ij}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^2 B_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + C(x)u = f(x)$$

$x = (x_1, x_2)$ pertenece al espacio euclideo 2-dimensional E_n

Desarrollándola, tenemos

$$A_{11}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1 \partial x_1} + A_{12}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1 \partial x_2} + A_{21}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1 \partial x_2} + A_{22}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2 \partial x_2} + B_1(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} + B_2(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} + C(x)u = f(x)$$

Una forma particular es la ecuación (3) es:

$$A \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} + 2D \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + 2E \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + F u(x, y) = 0$$

encial parcial elíptica es, por ejemplo, la que gobierna el fenómeno de actividad térmica sobre un volumen G con una superficie Γ del espacio tridimensional R^3 , donde un punto se determina por tres variables: $P(x, y, z)$. La conductividad térmica o proceso de transferencia de calor se determina por la ley de Fourier "el vector de densidad de un flujo calorífico \mathbf{W} es proporcional al gradiente de temperatura $u(P) = u(x, y, z)$, de tal modo que

$$\mathbf{W} = -k(P) \text{grad}(u) = -k(P) \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

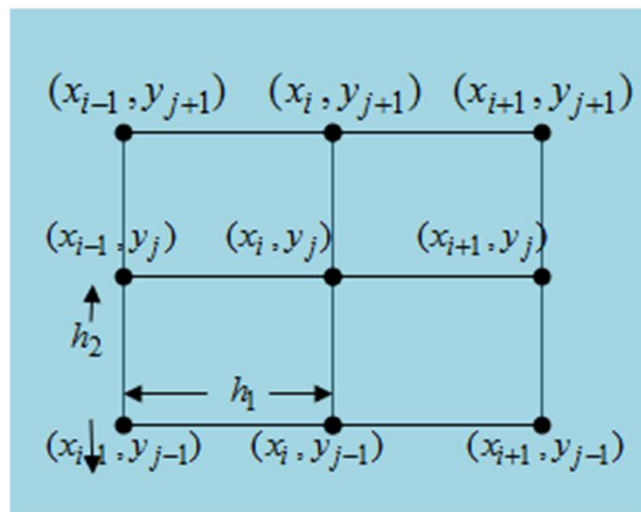
$k(P)$ es el coeficiente de conductividad térmica. La temperatura estacionaria $u(P) = u(x, y, z)$ en el caso de un medio homogéneo está dada por la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{1}{k} f(x, y, z)$$

donde el coeficiente de conductividad térmica $k = \text{Const.}$ no depende del punto $P(x, y, z)$. La ecuación la ecuación correspondiente para dos dimensiones es de la forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{k(x, y)} f(x, y)$$

3. Las ecuaciones diferenciales parciales elípticas se resuelven mediante métodos analíticos, sin embargo la solución numérica y gráfica mediante el uso de software matemático es más favorable. En nuestro caso hemos hecho uso del método de diferencias finitas sobre un dominio, que puede ser un rectángulo $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$, en el cual se construye una red en base a una partición de los lados del rectángulo (si la red es de nueve nodos, es como se aprecia en la siguiente figura), además permite expresar las diferencias para la primera derivada parcial respecto a x , las cuales son:



ite

Con error

$$u_x(x_i, y_j) \cong \frac{u(x_i + h_1, y_j) - u(x_i, y_j)}{h_1} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_1}$$

$$u_x(x_i, y_j) = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_1} - \frac{h_1}{2} u_{xx}(x_i + \theta h_1, y_j), \quad 0 < \theta < 1$$

Hacia atrás

$$u_x(x_i, y_j) \cong \frac{u(x_i, y_j) - u(x_i - h_1, y_j)}{h_1} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_1}$$

Diferencias simétricas

$$u_x(x_i, y_j) \cong \frac{u(x_i + h_1, y_j) - u(x_i - h_1, y_j)}{2h_1} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h_1}$$

$$u_x(x_i, y_j) = \frac{u(x_i + h_1, y_j) - u(x_i - h_1, y_j)}{2h_1} - \frac{h_1^2}{6} u_{xxx}(\theta, y_j), \quad \theta \in]x_i - h_1, x_i + h_1[$$

Las segundas diferencias son:

$$u_{xx}(x_i, y_j) \cong \frac{u_x(x_i + h_1, y_j) - u_x(x_i, y_j)}{h_1} \cong \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_1^2}$$

$$u_{yy}(x_i, y_j) \cong \frac{u_y(x_i, y_j + h_2) - u_y(x_i, y_j)}{h_2} \cong \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_2^2}$$

Ecuación de Laplace bidimensional: $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$, la cual rige la

transferencia de calor a través de una placa rectangular delgada definida sobre un rectángulo $0 < x < a$, $0 < y < b$, asumiendo que la transferencia de calor es limitada a las dimensiones x e y , que no hay fuentes ni sumideros de calor (en caso contrario se tiene una ecuación de Poisson), con las siguientes condiciones de contorno

$$u(x, 0) = f_1(x)$$

$$u(x, b) = f_2(x)$$

$$u(0, y) = g_1(y)$$

$$u(a, y) = g_4(y)$$

En particular considerando las condiciones de Dirichlet en los bordes (frontera)

$$u(x, 0) = 0 \quad , \quad u(x, 4) = 80$$

$$u(0, y) = 20 \quad , \quad u(4, y) = 180$$

y tomando una red cuadrada de nueve nodos internos, como se muestra en la figura, encontramos las diferencias centrales basadas según el esquema de la red, con pasos de $\Delta x = h_1$ y $\Delta y = h_2$, para cada nodo:

ada con $h_1 = h_2$, para cada uno de los nodos de la red se obtiene la

$$T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j} = 0$$

Con el balance de energía en los 9 nodos internos de la red, se obtiene un sistema algebraico lineal de 9 ecuaciones y 9 incógnitas,

$$\begin{array}{cccccccccc}
 4T_{1,1} & -T_{2,1} & & -T_{1,2} & & & & & & & = 20 \\
 -T_{1,1} & 4T_{2,1} & -T_{3,1} & & -T_{2,2} & & & & & & = 0 \\
 & -T_{2,1} & 4T_{3,1} & & & & -T_{3,2} & & & & = 180 \\
 -T_{1,1} & & & 4T_{1,2} & -T_{2,2} & & & -T_{1,3} & & & = 20 \\
 & -T_{2,1} & & -T_{1,2} & 4T_{2,2} & -T_{3,2} & & & -T_{2,3} & & = 0 \\
 & & -T_{3,1} & & -T_{2,2} & 4T_{3,2} & & & & -T_{3,3} & = 180 \\
 & & & -T_{1,2} & & & 4T_{1,3} & -T_{2,3} & & & = 100 \\
 & & & & -T_{2,2} & & -T_{1,3} & 4T_{2,3} & -T_{3,3} & & = 80 \\
 & & & & & -T_{3,2} & & -T_{2,3} & 4T_{3,3} & & = 260
 \end{array}$$

Los cálculos se hacen en forma analítica y la solución del sistema mediante alguno de los métodos conocidos, sin embargo en lugar de realizar los cálculos en forma analítica, también lo realizamos mediante una programación numérica, con un criterio de convergencia de 0.000001, sobre un rectángulo de lados $a = 4$, $b = 4$ y un número máximo de iteraciones de 3000 y usando MATLAB 2006 a, lo que permitió obtener una interface, en la que se puede ingresar datos y obtener la correspondiente solución numérica y gráfica, además posibilita tener los valores aproximados de la función en cada uno de los nodos de la malla.

CONCLUSIONES

1. Se ha analizado la deducción de una ecuación diferencial parcial de tipo elíptico sobre conductividad térmica sobre un volumen G con una superficie Γ del espacio tridimensional R^3 , donde un punto se determina por tres variables: $P(x, y, z)$. La conductividad térmica o proceso de transferencia de calor se determina por la ley de Fourier "el vector de densidad de un flujo calorífico \mathbf{W} es proporcional al gradiente de temperatura $u(P) = u(x, y, z)$, de tal modo que

$$\mathbf{W} = -k(P) \text{grad}(u) = -k(P) \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

$k(P)$ es el coeficiente de conductividad térmica. La temperatura estacionaria $u(P) = u(x, y, z)$ en el caso de un medio homogéneo está dada por la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{1}{k} f(x, y, z)$$

donde el coeficiente de conductividad térmica $k = \text{Const.}$ no depende del punto $P(x, y, z)$. La ecuación la ecuación correspondiente para dos dimensiones es de la forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{k(x, y)} f(x, y)$$

ferencial parcial de tipo elíptico sobre conductividad térmica en problemas estacionarios aquellos que no cambian con el tiempo y en el caso más sencillo en un medio homogéneo y con ausencia de fuentes está dada por la

ecuación de Laplace
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 .$$

3. Se ha analizado el método de diferencias finitas aplicado a la solución de la ecuación elíptica de Laplace
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 ,$$
 con valores constantes en la frontera

$$\begin{cases} u(x, 0) = 0 & , & u(x, 4) = 80 \\ u(0, y) = 20 & , & u(4, y) = 180 \end{cases} .$$

Tomando una red cuadrada y usando para cada nodo interno las diferencias centrales con pasos de $\Delta x = h_1 = \Delta y = h_2 :$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2} , \quad \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2}$$

con errores de $\varphi(\Delta x^2)$ y $\varphi(\Delta y^2)$ respectivamente, obteniéndose el sistema algebraico de ecuaciones $T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j} = 0 .$

división de la región sobre la que está definida la función desconocida de la ecuación diferencial, en nuestro caso una región plana; la solución del sistema de ecuaciones algebraico lineal y la representación gráfica de la solución se ha realizado a mediante un programa en el lenguaje de programación técnica MATLAB&SIMULINK R2006a, el cual permitió tener una interface en la que pueden ingresarse las variaciones de las variables, el número de divisiones de cada variable y además las condiciones de frontera, en particular valores constantes. En el programa se ha considerado un criterio de convergencia de 0.000001, sobre un rectángulo de lados $a = 4$, $b = 4$ y un número máximo de iteraciones de 3000.



*Your complimentary
use period has ended.
Thank you for using
PDF Complete.*

[Click Here to upgrade to
Unlimited Pages and Expanded Features](#)

GRACIAS

